



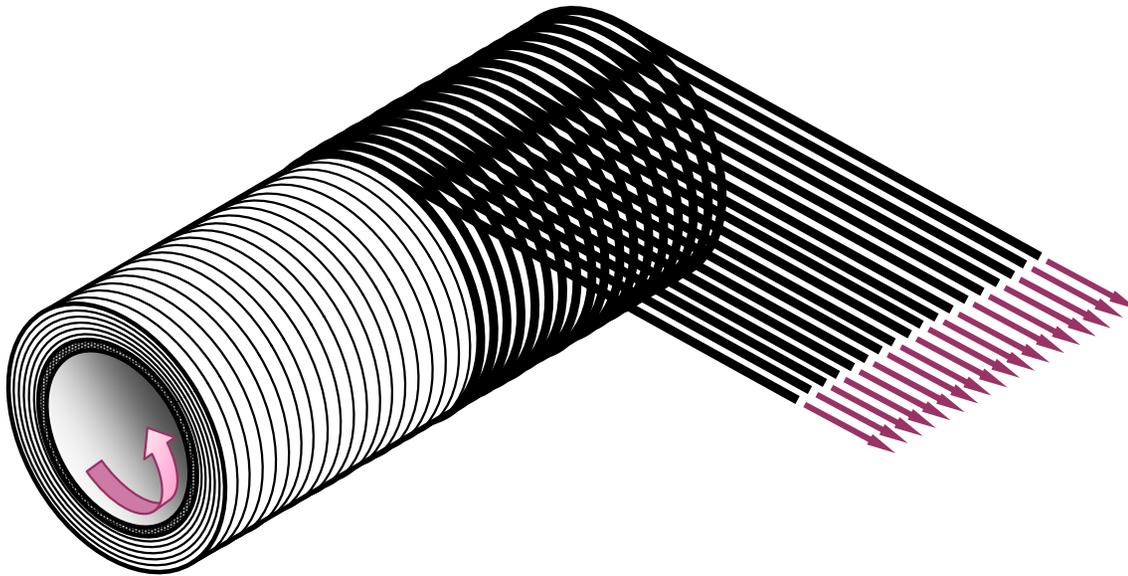
Д. А. Паршин

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ ВО ВРЕМЯ ИХ
ИЗГОТОВЛЕНИЯ МЕТОДОМ МНОГОСЛОЙНОЙ
НИТЕВОЙ НАВИВКИ**

XIV Международная конференция
«МЕХАНИКА, РЕСУРС И ДИАГНОСТИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ»

Екатеринбург, ИМАШ УрО РАН, 9–13 ноября 2020 г.

Схема укладки натягиваемых армирующих волокон при послойном формировании композиционного материала



- многослойная укладка армируемого материала
- тонкое армирующее волокно, выдерживающее значительное натяжение в пределах упругости
- возможность варьировать натяжение волокон
- достаточно жесткая формообразующая оправка
- медленное вращение оправки (если требуется)

Постановка задачи наращивания в скоростях

Витки тонких армирующих волокон \perp оси оправки и распределены достаточно хаотично по площади осевого продольного сечения \Rightarrow *трансверсально изотропные* эквивалентные упругие свойства

Цилиндрические координаты: φ — окружная, z — продольная, ρ — радиальная. Время: t

Компоненты скорости деформационного движения: v_φ, v_z, v_ρ

1) *Плоская деформация* + симметрия (осевая и зеркальная):

$$v_\varphi \equiv v_z \equiv 0, \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \equiv \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad v_\rho = v(\rho, t) \text{ — единственная ненулевая}$$

Обозначения производных: $\frac{\partial}{\partial \rho}(\) = (\)'$, $\frac{\partial}{\partial t}(\) = (\)\dot{\ }$

2) Компоненты тензора *скоростей деформации*:

$$\delta_\varphi = v(\rho, t)/\rho, \quad \delta_\rho = v'(\rho, t)$$

3) Скоростные аналоги *определяющих соотношений* материала:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_\varphi = C_{11}\delta_\varphi + C_{12}\delta_\rho \\ \dot{\sigma}_z = C_{12}\delta_\varphi + C_{23}\delta_\rho \\ \dot{\sigma}_\rho = C_{12}\delta_\varphi + C_{22}\delta_\rho \end{cases}$$

4) Скоростной аналог *уравнения равновесия*:

$$\dot{\sigma}'_\rho + (\dot{\sigma}_\rho - \dot{\sigma}_\varphi)/\rho = 0, \quad a < \rho < b(t)$$

5) Граничное условие на внутренней поверхности $\rho = a$ формируемого слоя:

$$v(a, t) = 0 \text{ — абсолютно жесткая оправка}$$

6) Граничные условия на наружной поверхности слоя $\rho = b(t)$ — поверхности роста:

$$\sigma_\varphi(b(t), t) = \sigma_{\varphi,0}(b(t)), \quad \sigma_z(b(t), t) = 0, \quad \sigma_\rho(b(t), t) = 0, \quad (1)$$

где $\sigma_{\varphi,0}(\rho)$ — окружной преднатяг вновь присоединяемого элементарного слоя материала радиуса ρ . Эту функцию можно задать следующим образом:

$$\sigma_{\varphi,0}(\rho) = k(\rho) P(\rho),$$

где $k(\rho)$ — плотность укладки армирующих волокон, т.е. число витков на единицу площади осевого продольного сечения формируемого слоя материала на расстоянии ρ от оси оправки, $P(\rho)$ — сила натяжения армирующего волокна в зависимости от радиуса витка

Граничные условия (1) эквивалентны начальным условиям на напряжения:

$$\boxed{\sigma_\varphi(\rho, \tau_*(\rho)) = \sigma_{\varphi,0}(\rho), \quad \sigma_z(\rho, \tau_*(\rho)) = 0, \quad \sigma_\rho(\rho, \tau_*(\rho)) = 0,} \quad (2)$$

где $\tau_*(\rho)$ — момент включения элементарного материального слоя радиуса ρ в состав растущего цилиндрического тела, поскольку

$$b(\tau_*(\rho)) \equiv \rho$$

7) Используя начальные условия (2) и уравнение равновесия, можно показать, что в растущем слое материала должно иметь место следующее граничное условие для скоростей напряжений на поверхности роста:

$$\dot{\sigma}_\rho(b(t), t) = -q(t), \quad q(t) = \sigma_{\varphi,0}(b(t)) \dot{b}(t)/b(t)$$

Аналитическое решение поставленной задачи

1) Определение скоростей изменения напряжений в растущем слое:

$$\dot{\sigma}_j(\rho, t) = \frac{\bar{b}(t)^{\alpha+1} q(t)}{C_\rho^+ \bar{b}(t)^{2\alpha} - C_\rho^-} \left(\frac{C_j^-}{\bar{\rho}^{\alpha+1}} - C_j^+ \bar{\rho}^{\alpha-1} \right), \quad j = \varphi, z, \rho$$

$$q(t) = \frac{\sigma_{\varphi,0}(b(t)) \dot{b}(t)}{b(t)} \quad \text{— определяется программами роста и преднатяга}$$

$$\bar{b} = \frac{b}{a}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{a} \quad \text{— безразмерные линейные величины}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}}, \quad C_\varphi^\pm = C_{11} \pm \alpha C_{12}, \quad C_z^\pm = C_{12} \pm \alpha C_{23}, \quad C_\rho^\pm = C_{12} \pm \alpha C_{22}$$

2) Восстановление эволюции напряжений в течение процесса роста:

$$\sigma_j(\rho, t) = \sigma_j(\rho, \tau_*(\rho)) + \int_{\tau_*(\rho)}^t \dot{\sigma}_j(\rho, \tau) d\tau, \quad j = \varphi, z, \rho$$

Трансверсальная изотропия:

«1» = « φ » — ось симметрии;

«2» = « z » и «3» = « ρ » — ортогональные оси в плоскости изотропии.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \lambda \bar{\sigma}_1 - \nu \bar{\sigma}_2 - \nu \bar{\sigma}_3 \\ \varepsilon_2 = -\nu \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 - \tilde{\nu} \bar{\sigma}_3 \\ \varepsilon_3 = -\nu \bar{\sigma}_1 - \tilde{\nu} \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_1 = \bar{C}_{11}\varepsilon_1 + \bar{C}_{12}\varepsilon_2 + \bar{C}_{12}\varepsilon_3 \\ \bar{\sigma}_2 = \bar{C}_{12}\varepsilon_1 + \bar{C}_{22}\varepsilon_2 + \bar{C}_{23}\varepsilon_3 \\ \bar{\sigma}_3 = \bar{C}_{12}\varepsilon_1 + \bar{C}_{23}\varepsilon_2 + \bar{C}_{22}\varepsilon_3 \end{cases}$$

$\bar{\sigma} = \sigma/E_2$ — безразмерное напряжение

$$\lambda = E_2/E_1 = 14/57, \quad \nu = \nu_{21} = 0.068, \quad \tilde{\nu} = \nu_{23} = 0.400$$

$$\left(|\nu_{21}| \leq \sqrt{\lambda}, \quad |\nu_{23}| \leq 1 \right)$$

— экспериментальные характеристики волокнистых стеклопластиков

[Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. — 2-е изд., перераб. и доп. — Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1980. — 247 с.]

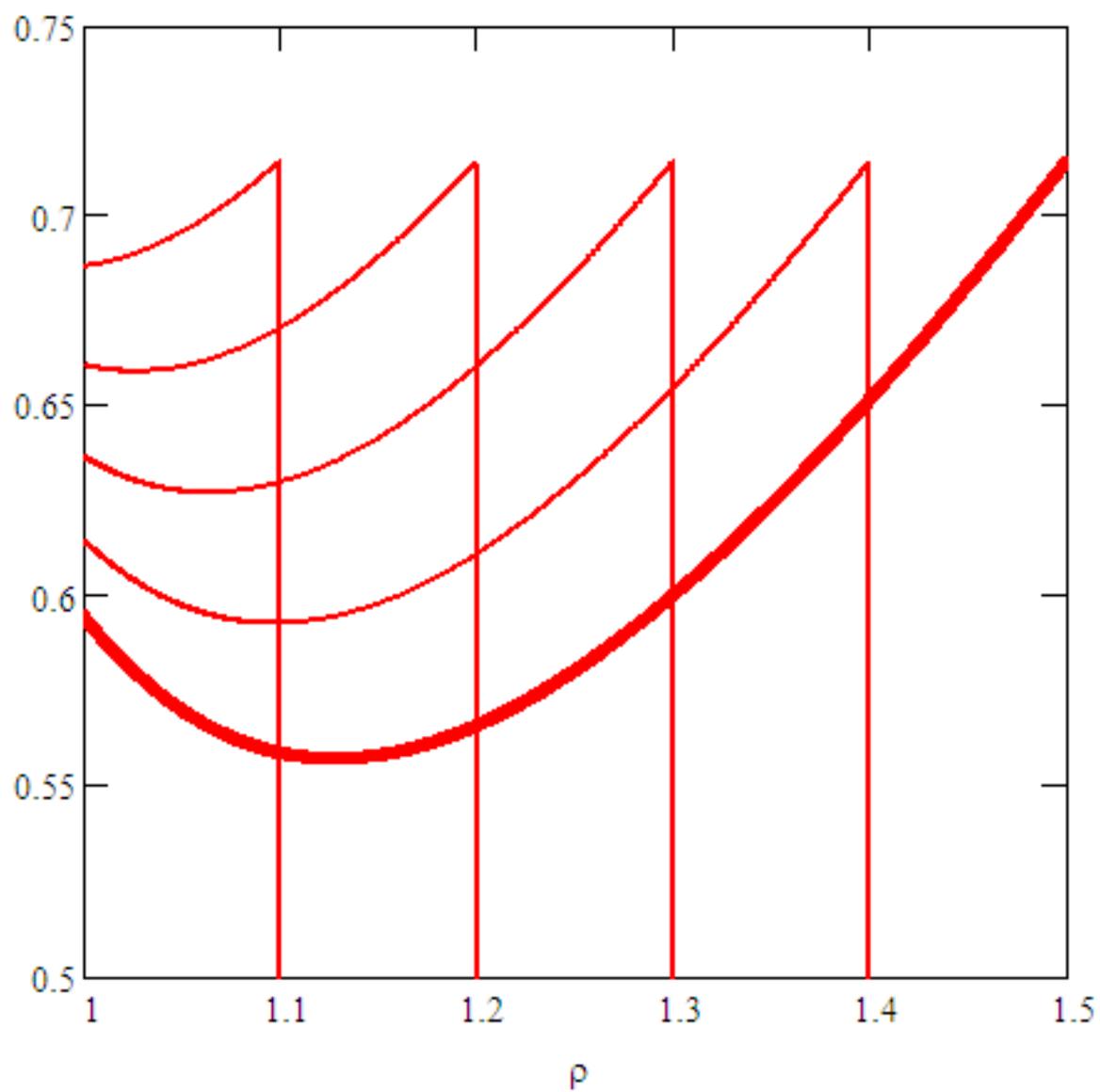
$$\bar{C}_{11} = \frac{1 - \tilde{\nu}}{\lambda(1 - \tilde{\nu}) - 2\nu^2} = 4.344,$$

$$\bar{C}_{12} = \frac{\nu}{\lambda(1 - \tilde{\nu}) - 2\nu^2} = 0.492,$$

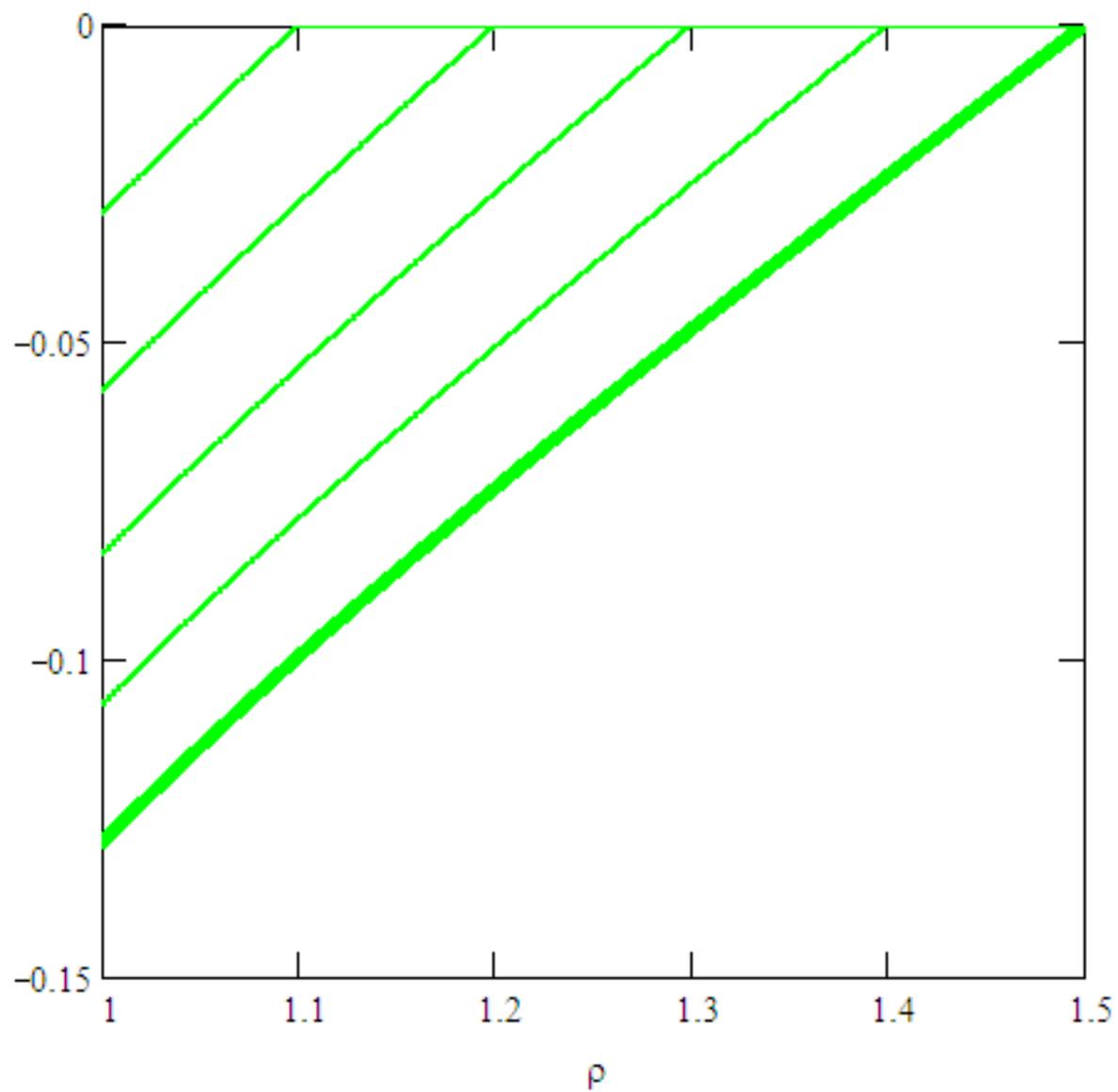
$$\bar{C}_{22} = \frac{\lambda - \nu^2}{\lambda(1 - \tilde{\nu}^2) - 2\nu^2(1 + \tilde{\nu})} = 1.246,$$

$$\bar{C}_{23} = \frac{\lambda\tilde{\nu} + \nu^2}{\lambda(1 - \tilde{\nu}^2) - 2\nu^2(1 + \tilde{\nu})} = 0.532$$

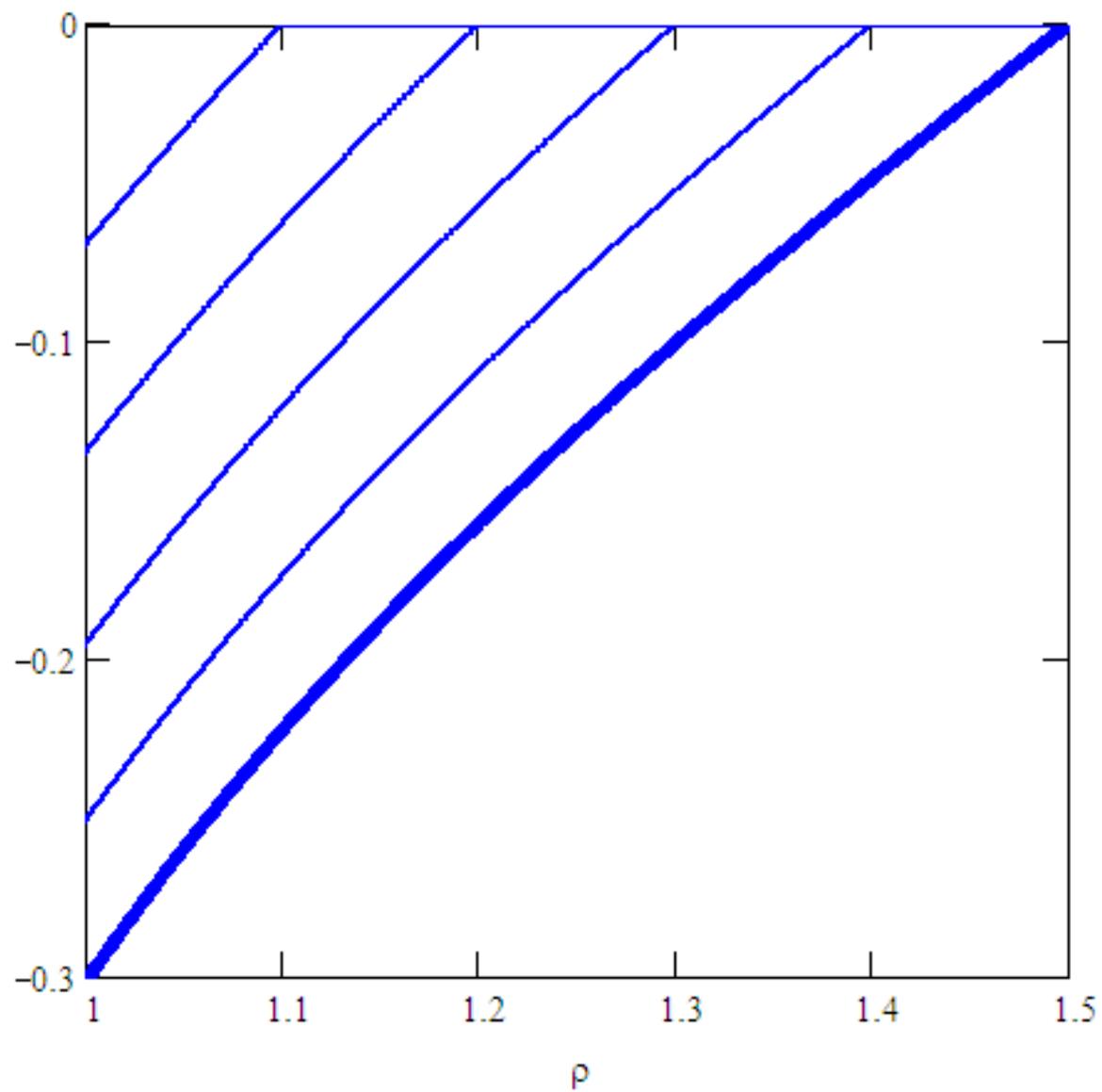
Эволюция эпюры окружных напряжений $\bar{\sigma}_\varphi(\bar{\rho}, t)$



Эволюция эпюры продольных напряжений $\bar{\sigma}_z(\bar{\rho}, t)$



Эволюция эпюры радиальных напряжений $\bar{\sigma}_\rho(\bar{\rho}, t)$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!