ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКОМ

Казаков А.Л.[1], Спевак Л.Ф.[2], Нефедова О.А. [2]

[1]*ИДСТУ СО РАН, 134, ул. Матросова, Иркутск, 664033, Россия, kazakov@icc.ru*

[2]*ИМАШ УрО РАН, 34, ул. Комсомольская, Екатеринбург, 620034, Россия, lfs@imach.uran.ru, nefedova@imach.uran.ru*

Доклад посвящен численному исследованию вырождающегося нелинейного дифференциального уравнения параболического типа с источником, зависящим от искомой функции [1]:

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2 + \varphi(u), \tag{1}$$

где $\varphi(u)$ – заданная функция источника, такая что $\varphi(0) = 0$.

Рассматривается процесс распространения тепла на плоскости при заданном законе движения фронта тепловой волны:

$$u\big|_{b(t,x_1,x_2)=0} = 0\,. \tag{2}$$

Краевая задача вида (1), (2) в отсутствие источника была впервые сформулирована в работах А.Ф. Сидорова [2].

При выполнении условия (2) справедливо следующее соотношение для теплового потока вдоль нулевого фронта:

$$q\big|_{b(t,x_1,x_2)=0} = \frac{\sigma b_t(t, x_1, x_2)}{\sqrt{b_{x_1}^2(t, x_1, x_2) + b_{x_2}^2(t, x_1, x_2)}}. \tag{3}$$

Соотношение (3) позволяет свести решение задачи (1), (2) на заданном промежутке времени к решению краевой задачи для уравнения Пуассона в узловые моменты времени с выбранным шагом. Для решения задачи для уравнения Пуассона был разработан итерационный алгоритм на основе метода граничных элементов с применением метода двойственной взаимности.

Для верификации разработанного алгоритма использовались решения тестовых задач в виде специальных степенных рядов, а также точные решения, построенные на основе автомодельного подхода. Рассмотренные примеры показали эффективность предложенного подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-07-00407.

Литература

1. *J.L. Vazquez. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Publ. Clarendon Press, 2007, 648 p.*
2. *А.Ф. Сидоров. Избранные труды: Математика. Механика. Изд-во Физматлит, 2001, 576 с.*