

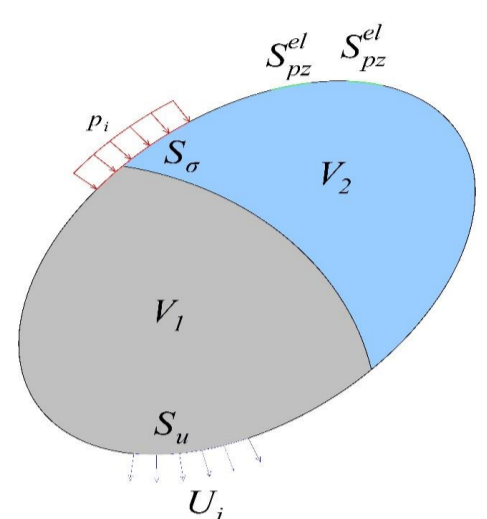
ОТКЛИК КОНСТРУКЦИИ НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МЕХАНИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ

Ошмарин Д.А., Юрлова Н.А., Севодина Н.В.
Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

В связи с возрастающим применением пьезоэлектрических актуаторов в задачах управления динамическим поведением конструкций особое место занимают исследования, посвященные определению законов управления, обеспечивающих их работу по демпфированию колебаний объектов. Для этого необходимо понимание того, как откликнется конструкция на то или иное внешнее механическое или электрическое воздействие, либо на их комбинацию.

Данному исследованию посвящена настоящая работа. На основе решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел проведена оценка их механического отклика на совместное воздействие механических (силовых, кинематических) и электрических (разность потенциалов, электрический ток) нагрузок в их различной комбинации.

Математическая постановка задачи о вынужденных колебаниях кусочно-однородных электро-вязкоупругих тел:



$$V = V_1 + V_2$$

V_1 состоит из упругих и/или вязкоупругих элементов
 V_2 состоит из пьезоэлектрических элементов

Вариационное уравнение движения тела (1), состоящего из упругих, вязкоупругих и пьезоэлектрических элементов формулируется на основе соотношений теории линейной упругости/вязкоупругости и уравнений Максвелла.

Вариационное уравнение движения

$$\int_{V_1} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) dV - \int_{S_1} \delta u_i p_i dS - \int_{S_2} q_i \delta \varphi dS = 0 \quad (1)$$

где D, E – векторы электрической индукции и напряженности электрического поля

p – вектор внешних усилий

$S_{pc} = S_{pc}^{el} + S_{pc}^{nl}$ – поверхность, ограничивающая пьезоэлектрический элемент

q_i, φ – поверхностная плотность зарядов и электрический потенциал

Для изотермических процессов в упругих средах справедливы следующие физические соотношения:

$$\text{Закон Гука для линейных изотропных частей объема } V_1: \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G_{ij} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} \right), \sigma = B_{ij} \theta \quad (2)$$

$$\text{Закон Гука для линейных анизотропных частей объема } V_1: \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

Здесь G_{ij}, G_{kl} – упругие сдвиговой модуль и модуль объемного сжатия, σ – среднее напряжение, θ – объемная деформация, s_{ij}, e_{ij} – компоненты шаровых частей и дивергентов тензоров напряжений и деформаций.

$$\text{Линейные соотношения Больцмана-Вольтерра для вязкоупругих частей:} \begin{cases} s_{ij} = 2G_{ij}^0 \left(\varepsilon_{ij} - \int_0^t R_{ij}(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right) \\ \sigma = B_{ij}^0 \left(\theta - \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \vartheta(\tau) d\tau \right) \end{cases} \quad (4)$$

G_{ij}^0, B_{ij}^0 – мгновенные сдвиговой и объемный модули, R_{ij}, K_{ij} – ядра релаксации,

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2\bar{G} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} \right) = 2(G_{Re} + iG_{Im}) \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} \right), \quad (5)$$

$$\sigma = \bar{B} \theta = (B_{Re} + iB_{Im}) \theta$$

$$\bar{G} = G_{Re} + iG_{Im} = G_{Re} \left(1 - i \frac{G_{Im}}{G_{Re}} \right) = G_{Re} (1 - i\delta_G); \bar{B} = B_{Re} + iB_{Im} = B_{Re} \left(1 - i \frac{B_{Im}}{B_{Re}} \right) = B_{Re} (1 - i\delta_B) \quad (6)$$

Физические соотношения для пьезоэлектрических частей объема V_2 : $\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ijk} E_k \\ D_k = \beta_{ijk} \varepsilon_{ij} + \epsilon_{ik} E_i \end{cases} \quad (7)$ $\beta_{ijk}, \epsilon_{ik}$ – тензоры пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов

Вид решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}_0(x) e^{i\Omega t} \quad (8)$$

Здесь, $\bar{u}_0(x) = \{u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3), \varphi(x_1, x_2, x_3)\}$ – обобщенный вектор состояния, содержащий компоненты перемещений u_i, u_j, u_k и электрический потенциал φ ; Ω – частота внешнего возбуждения.

Граничные условия (ГУ) для рассматриваемой задачи электровязкоупругости могут быть условно разделены на механические и электрические. Механические граничные условия записываются в виде, аналогичном тому, что используется в задачах упругости или вязкоупругости

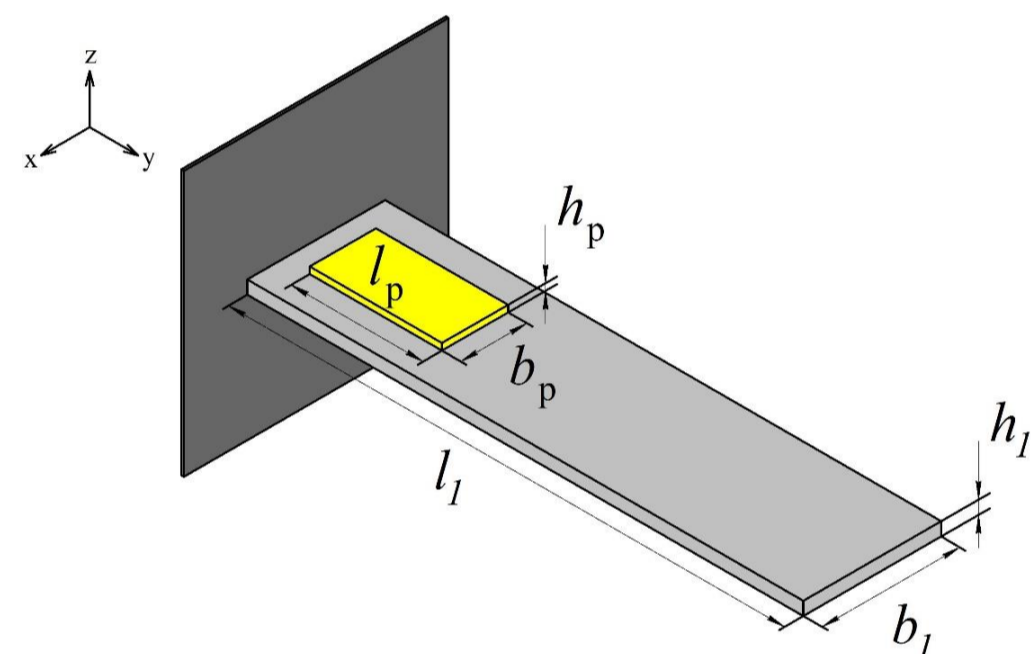
$$S_{pc}: \sigma_{ij} n_j = p_i, \quad S_a: u_i = U_i \quad (9)$$

где S_{pc} – поверхность, на которой заданы компоненты тензора напряжений σ_{ij} , S_a – поверхность, на которой заданы компоненты вектора перемещений U_i , n_j – компоненты вектора единичной нормали к поверхности S_{pc} . Соответствующие ГУ для электрической компоненты вектора состояния записываются следующим образом:

$$S_{pc}^{el}: \int_{S_{pc}^{el}} (\bar{n} \cdot \bar{D}) dS = 0, \quad S_{pc}^{nl}: \varphi = V, \quad (10)$$

где S_{pc}^{el} – часть поверхности объема V_2 , не покрытая электродами, а S_{pc}^{nl} – часть поверхности объема V_2 , имеющая электродное покрытие. В связанных задачах электровязкоупругости традиционно считается, что часть электродированной поверхности S_{pc}^{nl} заземлена, т.е. на ней задано граничное условие $\varphi = V$. Тогда, электрический потенциал $\varphi = V$, заданный на оставшейся части поверхности S_{pc}^{el} , будет иметь смысл разности потенциалов, т.е. электрического напряжения.

Объект исследований – консольно-заземленная пластина



Пластина имеет следующие размеры:
Длина пластины – $l_1 = 500$ мм,
Ширина пластины – $b_1 = 60$ мм,
Толщина пластины – $h_1 = 0.5$ мм.

В качестве материала пластины был выбран модельный вязкоупругий материал со следующими значениями компонент комплексных динамических модулей

$$G_{Re} = 2.71 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad B_{Re} = 6.23 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \\ G_{Im} = 2.71 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \quad B_{Im} = 6.23 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

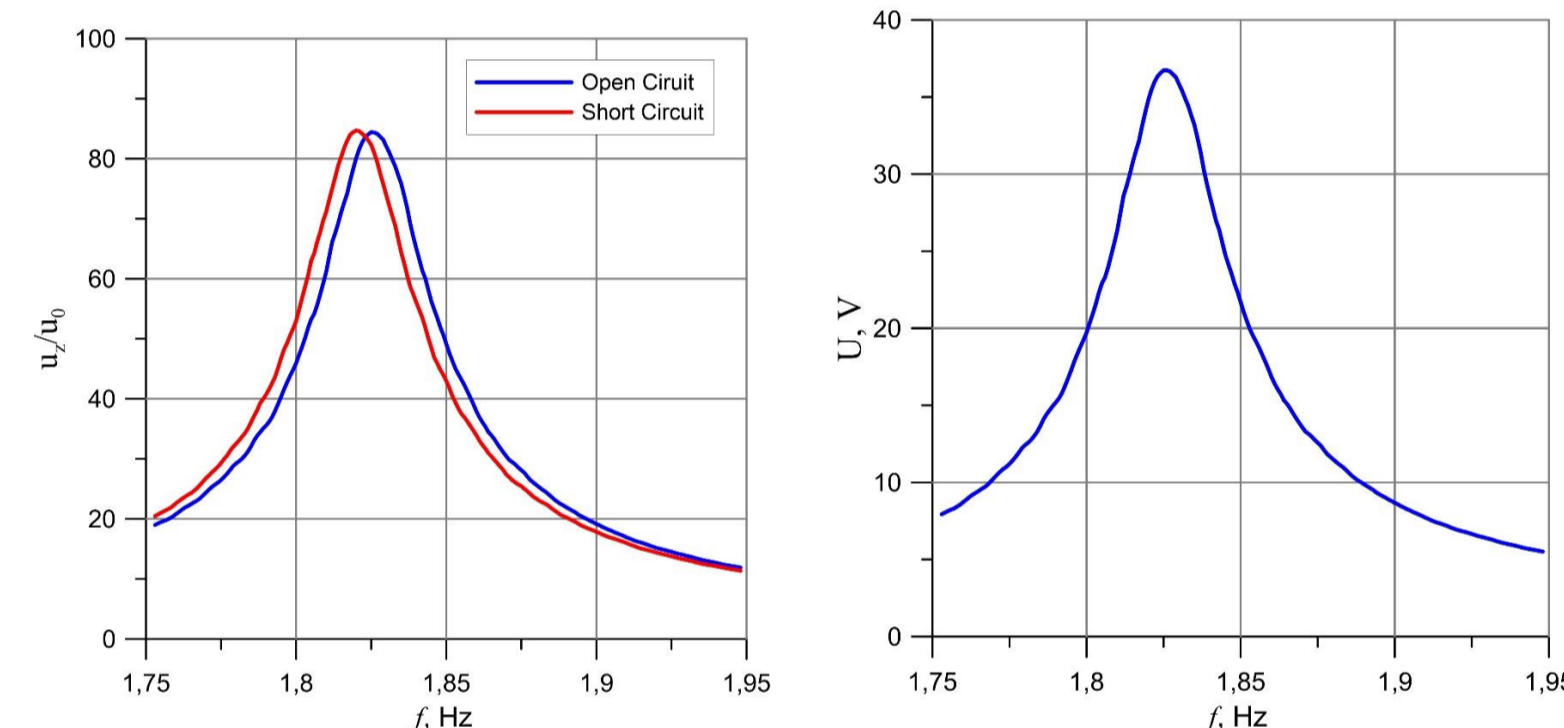
К поверхности пластины присоединен пьезоэлемент прямоугольной формы с размерами $l_p = 50$ мм, $b_p = 20$ мм, $h_p = 0.3$ мм. Пьезоэлемент выполнен из пьезокерамики ЦТС-19 со следующими физико-механическими характеристиками:

$$C_{11} = C_{22} = 10.9 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad C_{13} = C_{23} = 5.4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad C_{12} = 6.1 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad C_{33} = 9.3 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} = 2.4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \text{Кл/м}^2, \quad \beta_{33} = 14.9 \text{ Кл/м}^2, \quad \beta_{51} = \beta_{32} = 10.6 \text{ Кл/м}^2, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 8.2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}, \\ \varepsilon_{33} = 8.4 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}, \quad \rho_p = 7500 \text{ кг/м}^3.$$

Верхняя и нижняя поверхность пьезоэлемента электродированы. Центр масс пьезоэлемента смещен на 55 мм от заземленного конца и расположен на продольной оси симметрии пластины.

Определение значения напряжения, необходимого для снижения амплитуды вынужденных колебаний:

АЧХ компоненты вектора перемещений u_z свободного конца пластины и электрического напряжения U , генерируемого пьезоэлементом, для первой моды колебаний при действии **только кинематической нагрузки**

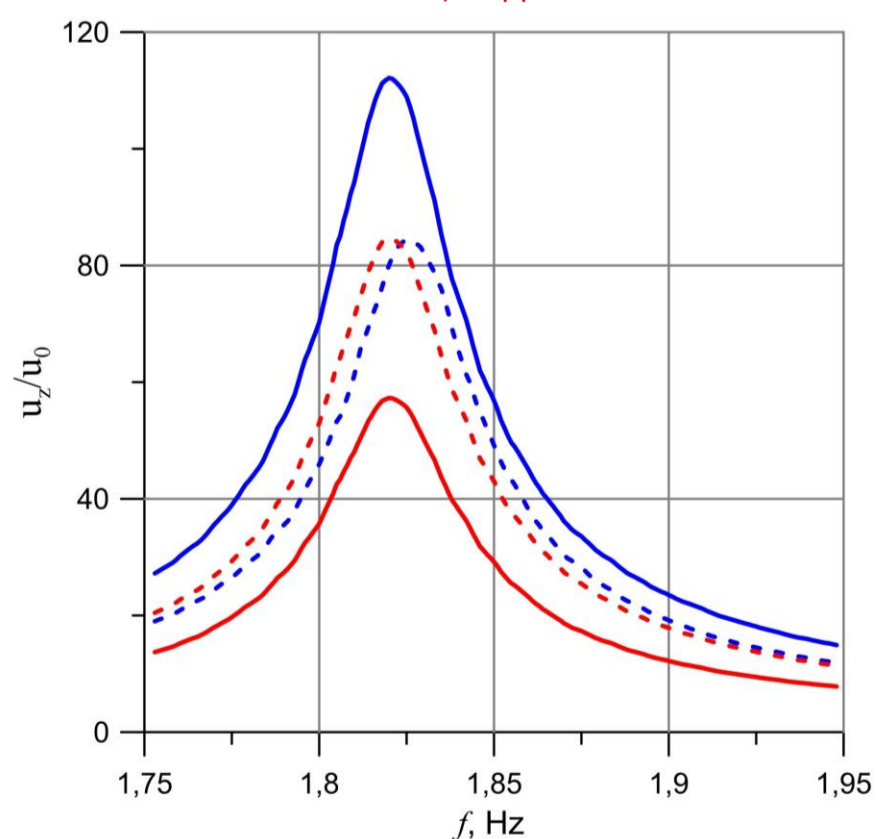


u_0 – значение компоненты u_z вектора перемещений, приложенное к жесткой заделке;
синяя линия – АЧХ для режима холостого хода (open circuit);
красная линия – АЧХ для режима короткого замыкания (short circuit);

Требуемое значение напряжения – $U_{max} = 36.95$ В

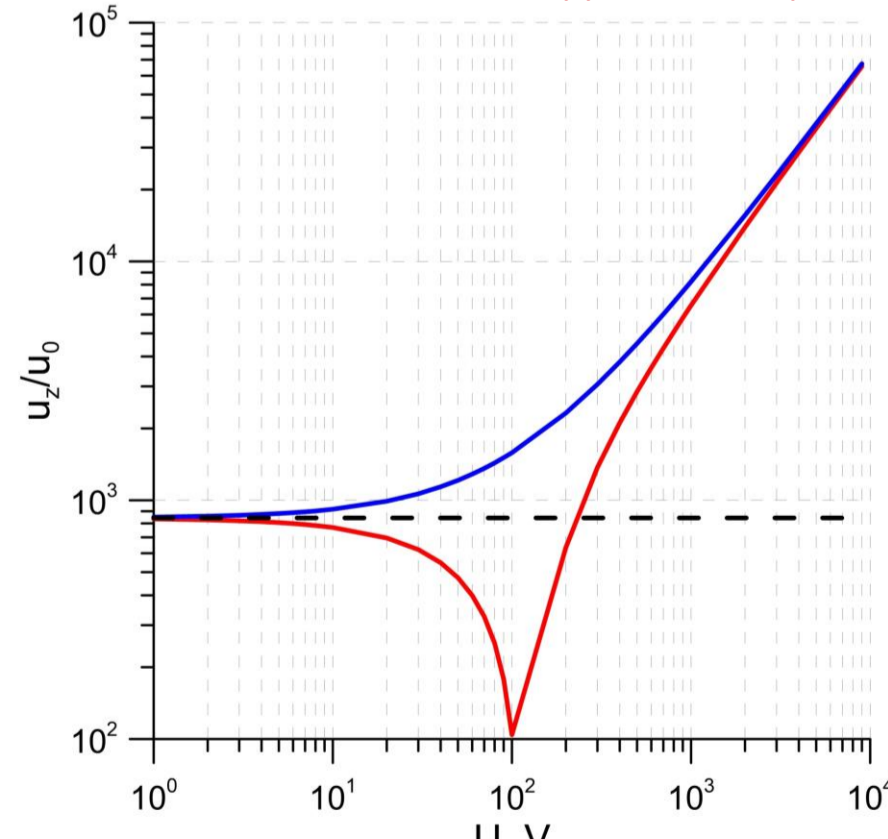
Результаты численных расчетов: АЧХ компоненты вектора перемещений u_z свободного конца пластины

Нагрузка: **совместное действие** кинематической нагрузки и электрического напряжения $U = \pm U_{max} = \pm 36.95$ В, подаваемого на пьезоэлемент



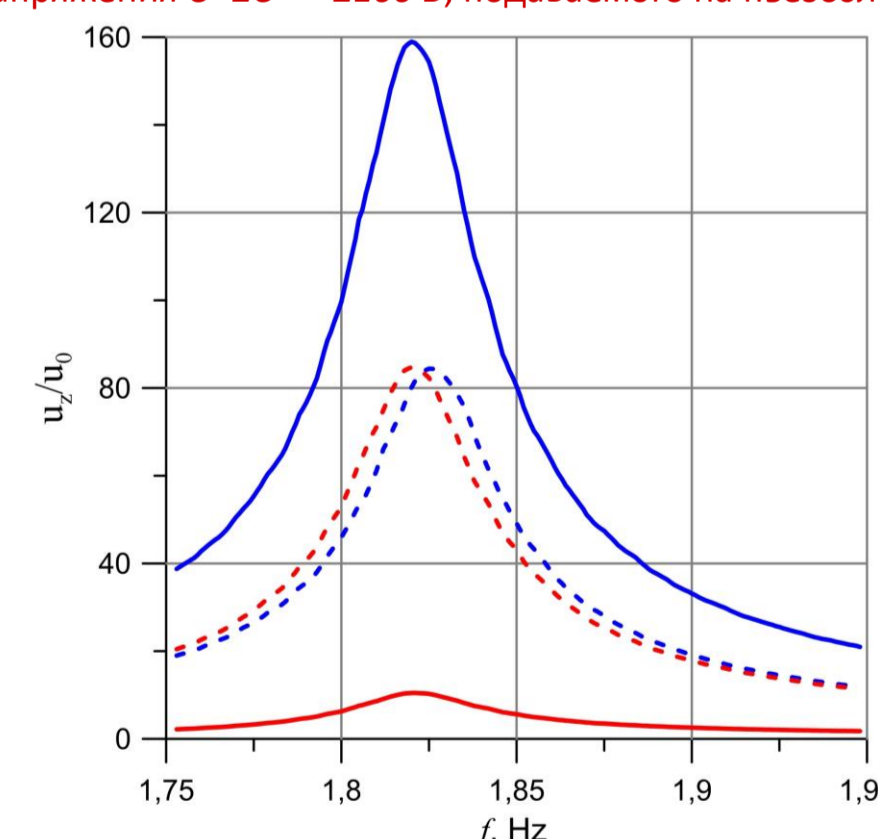
— Только кинематическая нагрузка (пьезоэлемент в режиме холостого хода);
- - - Только кинематическая нагрузка (пьезоэлемент в режиме короткого замыкания);
— Совместное действие кинематической нагрузки и напряжения $U = +U_{max}$ (в фазе);
- - - Совместное действие кинематической нагрузки и напряжения $U = -U_{max}$ (в противофазе).

Зависимость величины u_z от величины U для первой моды колебаний при **совместном действии** кинематической нагрузки и электрического напряжения



— Совместное действие кинематической нагрузки и напряжения -U (в противофазе)
— Совместное действие кинематической нагрузки и напряжения +U (в фазе)
- - - Только кинематическая нагрузка

Нагрузка: **совместное действие** кинематической нагрузки и электрического напряжения $U = \pm U_{opt} = \pm 100$ В, подаваемого на пьезоэлемент



— Только кинематическая нагрузка (пьезоэлемент в режиме холостого хода);
- - - Только кинематическая нагрузка (пьезоэлемент в режиме короткого замыкания);
— Совместное действие кинематической нагрузки и напряжения $U = +100$ В (в фазе);
- - - Совместное действие кинематической нагрузки и напряжения $U = -100$ В (в противофазе).

Выводы:

В рамках данной работы на примере консольно-заземленной пластины исследовано влияние на механический отклик системы приложенного механического или электрического внешнего воздействий в их различной комбинации.

1. В результате численных экспериментов на основе решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных электро-вязкоупругих тел установлен ряд характерных особенностей зависимости механического отклика системы от величины приложенного механического или электрического внешнего воздействий в их различной комбинации.
2. Показано, что при совместном действии на рассматриваемую систему механической и электрической нагрузок путем изменения величины приложенной разности потенциалов, а также угла сдвига фаз между механической и электрической нагрузками, можно достаточно эффективно управлять степенью механического отклика конструкции как увеличивая, так и уменьшая амплитуду колебаний.
3. Установлено, что результирующий механический отклик системы при совместном действии двух нагружающих факторов обладает свойством аддитивности ее механических откликов на действие каждого из факторов по отдельности.
4. Продемонстрировано, что минимальной величины механического отклика системы при совместном действии двух нагружающих факторов можно добиться в случае, когда величины механического отклика от действия каждого из факторов по отдельности совпадают, но при этом нагрузки действуют в противофазе.