ЗАСТОЙНЫЕ ТОЧКИ НЕОДНОРОДНОГО РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЭКМАНА В ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ЗОНЕ ОКЕАНА

Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю.

Институт машиноведения УрО РАН, Россия,
Уральский Федеральный государственный университет

Рассматривается конвективное течение Экмана в экваториальной зоне. При этом полагается, что широта места φ мала и можно, приближенно, принять $sin\varphi \approx 0$, $cos\varphi \approx 1$. Введем локальную систему координат следующим образом: ось oz направлена вдоль радиуса Земли, ось oy - по касательной к меридиану в сторону Северного полюса, ось ox им перпендикулярна и направлена по касательной к экватору.

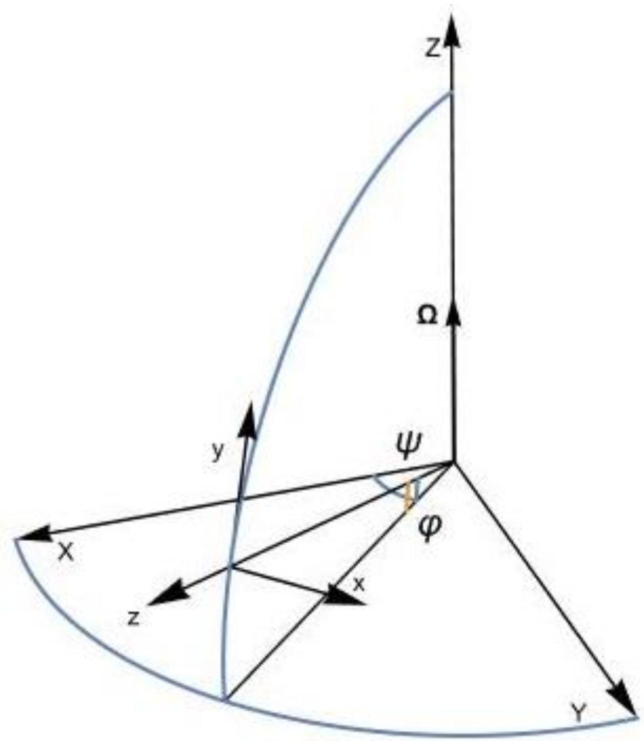

Рис. 1. Схема ориентации осей координат и векторов в экваториальной зоне

Слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости в окрестности экватора описывается системой уравнений в безразмерных переменных

$$\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\Delta V_x \qquad \left(V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\Delta V_y$$

$$\mathrm{Ra}\left(V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\Delta^* T \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{2\delta V_x}{\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Ek}}+\frac{\delta}{\mathrm{Gr}}T \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0$$

Решение системы ищем в виде

$$V_x=U_0(z)+xU_1(z)+yU_2(z) \qquad V_y=V_0(z)+xV_1(z)+yV_2(z)$$

$$P=P_0(z)+xP_1(z)+yP_2(z) \qquad T=T_0(z)+xT_1(z)+yT_2(z)$$

Граничные условия сдвиговых слагаемых компонент скоростей

$$U_1'(1)=\delta\tau_{11} \qquad V_1'(1)=\delta\tau_{21} \qquad U_2'(1)=\delta\tau_{12} \qquad V_2'(1)=\delta\tau_{22}$$

$$\delta U_1(0)=aU_1'(0) \quad \delta V_1(0)=aV_1'(0) \quad \delta U_2(0)=aU_2'(0) \quad \delta V_2(0)=aV_2'(0)$$

Уравнения сдвиговых слагаемых скорости

$$U_1'' = \mathrm{Re}\,\delta^2 \left(U_1^2 + U_2 V_1\right) \qquad V_2'' = \mathrm{Re}\,\delta^2 \left(U_2 V_1 + V_2^2\right)$$

$$U_2'' = \mathrm{Re}\,\delta^2 \left(U_1 U_2 + U_2 V_2\right) \quad V_1'' = \mathrm{Re}\,\delta^2 \left(U_1 V_1 + V_1 V_2\right) \tag{2}$$

$$U_1 + V_2 = 0$$

Система уравнений (2) нелинейная, переопределенная. Для существования решения должны выполняться условия совместности.

Уравнения градиентов температуры и давления

$$T_1'' = Ra\left(T_1(z)\, U_1(z) + T_2(z)\, V_1(z)\right) \qquad P_1' = \frac{\delta U_1}{Ek\,Gr} + \frac{T_1}{\delta}$$

$$T_2'' = Ra\left(T_1(z)\, U_2(z) + T_2(z)\, V_2(z)\right) \qquad P_2' = \frac{\delta U_2}{Ek\,Gr} + \frac{T_2}{\delta} \tag{3}$$

Уравнения фоновых слагаемых скоростей, давления и температуры

$$U_0'' = \mathrm{Re}\,\delta^2 \left(P_1 + U_0 U_1 + U_2 V_0\right) \qquad V_0'' = \mathrm{Re}\,\delta^2 \left(P_2 + U_0 V_1 + V_0 V_2\right)$$

$$T_0''(z) = Ra\left(T_1(z)\, U_0(z) + T_2(z)\, V_0(z)\right) \quad P_0' = \frac{\delta}{\mathrm{Gr}}\frac{U_0}{\mathrm{Ek}} + \frac{T_0}{\delta} \tag{4}$$

Условие совместности системы уравнений (2)

$$U_2 V_1 + U_1^2 = 0$$

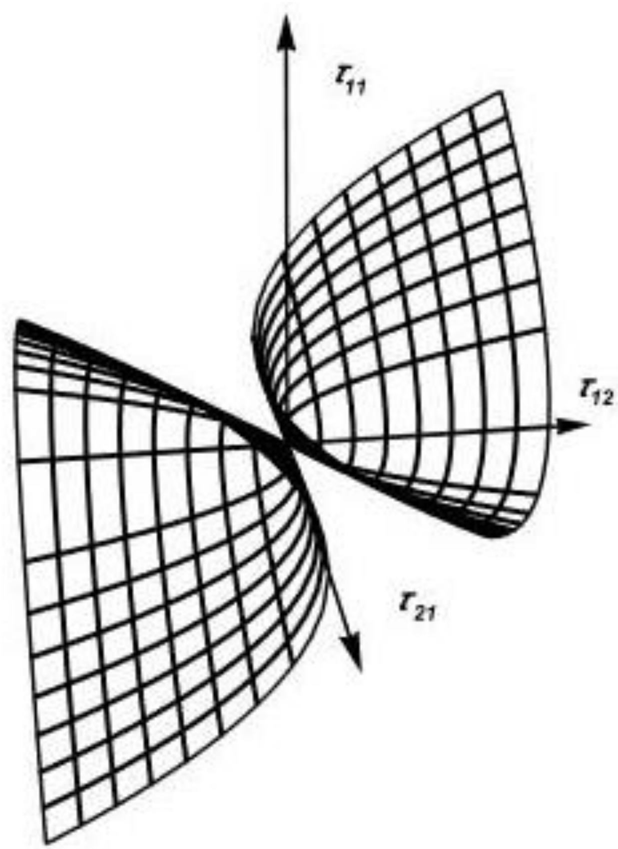

Рис. 2.

Поверхность, в пространстве параметров граничных условий, на которой выполняются условия совместности. Если изображающая точка параметров лежит на поверхности, то решение системы (2) существует.

Здесь представлены решения систем (2) и (3). Решения системы (4), определяющие фоновые слагаемые компонент скорости, давления и температуры представляют полиномы высокого порядка и не приводятся

Сдвиговые компоненты скорости

$$U_1 = C_1\left(z + a/\delta\right) \qquad U_2 = C_3\left(z + a/\delta\right) \qquad V_1 = C_5\left(z + a/\delta\right)$$

$$V_2 = -U_1 = -C_1\left(z + a/\delta\right)$$

Градиент температуры

$$T_1\left(z\right) = C_{10} + C_9 z + Ra\left(\frac{C_8}{2}\left(\frac{z^3}{3} + \frac{a z^2}{\delta}\right) + \frac{C_7}{6}\left(\frac{z^4}{2} + \frac{a z^3}{\delta}\right)\right)$$

$$T_2\left(z\right) = \frac{C_8 + C_7 z - C_1\left(C_{10} + C_9 z + Ra\left(\frac{C_8 z^3}{6} + \frac{C_7 z^4}{12} + \frac{a C_8 z^2}{2\delta} + \frac{a C_7 z^3}{6\delta}\right)\right)}{C_3}$$

Застойные точки

Если на оси oz имеется застойная точка, то множество застойных точек определяется системой уравнений

$$\tau_{11}x\left(z^*+a/\delta\right)+\tau_{12}y\left(z^*+a/\delta\right)=0,$$
$$\tau_{21}x\left(z^*+a/\delta\right)-\tau_{11}y\left(z^*+a/\delta\right)=0 \qquad (5)$$

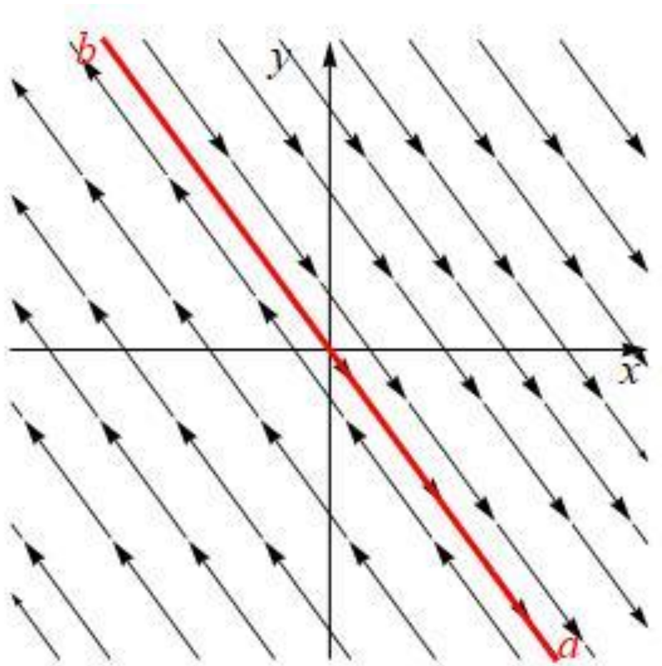

Рис. 3.
множество застойных точек при наличии застойной точки на оси Z

Система уравнений (5) линейная однородная. Ее определитель равен нулю. Следовательно, решение существует всегда и не единственное.
Рис. 3.

Если застойная точка на оси oz отсутствует, то множество застойных точек на глубине z* определяется системой неоднородных линейных алгебраических уравнений:

$$\tau_{11} x\left(z^* + a/\delta\right) + \tau_{12} y\left(z^* + a/\delta\right) = -U_0\left(z^*\right),$$

$$\tau_{21} x\left(z^* + a/\delta\right) - \tau_{11} y\left(z^* + a/\delta\right) = -V_0\left(z^*\right).$$

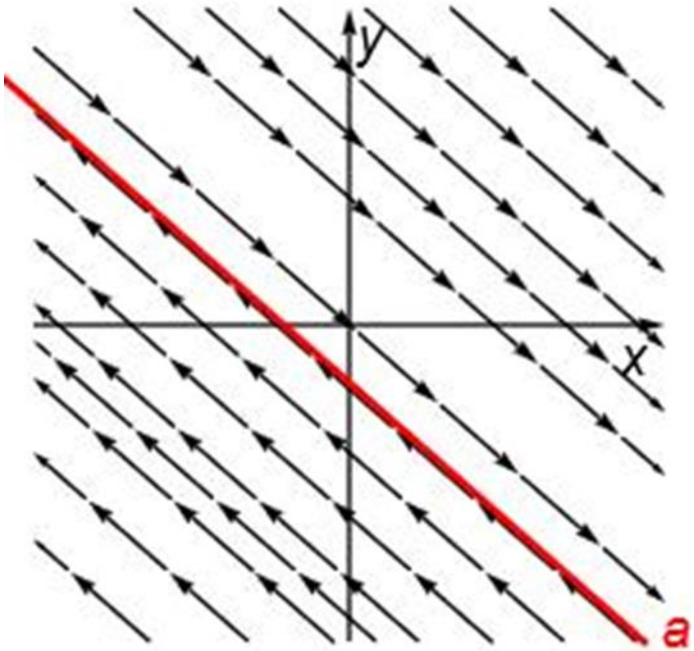

Рис. 4.
Множество застойных точек при отсутствии застойной точки на оси oz

Определитель системы равен нулю. Как известно, решение системы существует и не одно, если выполняются условия совместности.

$$\tau_{11} U_0(z^*) + \tau_{12} V_0(z^*) = 0$$

Будем рассматривать это соотношение как уравнение относительно одного из параметров граничных условий системы (3). Если решение этого уравнения существует, то существует и множество застойных точек. Рис. 4.

Заключение

В работе построено неоднородное аналитическое решение, описывающее конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости в экваториальной зоне с учетом двух компонент силы Кориолиса. Решение для экваториальной зоны, в отличие от решения для средних широт [3, 6], представлено в виде полиномов высокого порядка. Исследовано множество застойных точек решения. Показано, что линия застойных точек на заданной глубине существует, если существует двойная застойная точка фоновых компонент скорости, или застойные точки отсутствуют.

Благодарю за внимание

Общее решение – компонента фоновой скорости
пример

$$U_0 = C_{16} + C_{15}\ z -$$

$$-z^2\delta^2\left[\frac{Ra\left(5\ a\left(C_7+4C_8\right)+\left(2C_7+5C_8\right)\delta\right)}{240}+\frac{(2aC_1+\left(C_1+\left(2\ C_{10}+C_9\right)\ Ek\right)\delta)}{4\ Ek}\right]+$$

$$+z^3\left(\frac{C_{14}Gr\delta^2}{6}+\frac{\delta^2\left(a\ C_1+C_{10}Ek\delta\right)}{6\ Ek}\right)+z^4\left(\frac{C_{13}\ Gr\delta^2}{12}+\frac{\left(C_1+C_9Ek\right)\delta^3}{24\ Ek}\right)+$$

$$+z^5\delta^2\left[\frac{a\ C_8\ Ra}{120}-\frac{\delta^2 Gr}{80\ Ek}\left(\left(C_1^2+C_3^2\right)(2a+\delta)+\left(C_7+2C_8\right)\delta Ek\right)\right]+$$

$$+\ z^6\delta^2\left[\frac{Ra\left(a\ C_7+C_8\delta\right)}{720}+\frac{Gr\,\delta^2}{180\ Ek}\left(a\left(C_3^2+C_1^2\right)+\ C_8\ Ek\delta\right)\right]+$$

$$+\ z^7\delta^3\left[\frac{C_7\ Ra}{2520}+\frac{\delta^2 Gr}{1008\ Ek}\left(C_3^2+C_1^2+C_7Ek\right)\right]$$