КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА-ХИМЕНЦА. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИ ЛИНЕЙНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ СЛОЯ ЖИДКОСТИ

Привалова В.В., Просвиряков Е.Ю.

Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук
г. Екатеринбург

Аннотация. *Найдено новое точное решение двумерных уравнений Обербека –Буссинеска. Решение получено для течения жидкости, возникающем при неоднородном распределении скоростей и линейного источника тепла на верхней границе бесконечного слоя вязкой несжимаемой жидкости. Приведен анализ полиномиальных решений, описывающих естественную конвекцию жидкости. Показано существование точек, в которых гидродинамические поля обращаются в нуль внутри слоя жидкости.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются уравнения плоского движения вязкой несжимаемой жидкости, описывающие влияние температуры на распределение гидродинамических полей, в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)+g\beta T\,, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial T}{\partial t}+V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_z\frac{\partial T}{\partial z}=\chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$
$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial z}=0\,.$$

Здесь V_x и V_z – скорости параллельные соответствующим координатным осям прямоугольной декартовой системы координат; P – отклонение давления от гидростатического, отнесённое к постоянной средней плотности жидкости ρ; T – отклонение от средней температуры; ν, χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно; g – ускорение свободного падения; β – температурный коэффициент объёмного расширения жидкости [1, 2].

Решение системы Обербека-Буссинеска (1) будем искать в виде:

$$V_x(x,z,t)=U(z,t)+xu(z,t)\,,\ V_z(z,t)=w(z,t)\,,$$
$$P(x,z,t)=P_0(z,t)+xP_1(z,t), \qquad (2)$$
$$T(x,z,t)=T_0(z,t)+xT_1(z,t)\,.$$

Подставим выражения (2) в (1), получим систему уравнений для определения неизвестных функций, входящих в класс точных решений (2). Полученную систему запишем в том порядке, в котором она будет проинтегрирована:

$$\frac{d^2T_1}{dz^2}=0\,,\ \frac{d^2T_0}{dz^2}=0\,,\ \frac{dP_1}{dz}=g\beta T_1\,,$$
$$\nu\frac{d^2U}{dz^2}=P_1\,,\ \nu\frac{d^2u}{dz^2}=0\,,\ \frac{dw}{dz}+u=0\,, \qquad (3)$$
$$\frac{dP_0}{dz}=g\beta T_0+\nu\frac{d^2w}{dz^2}\,.$$

Сформулируем граничные условия для горизонтального слоя жидкости. Толщина слоя жидкости h ($0<z<h$). На нижней (твердой) границе при $z=0$ выполняются условия прилипания:

$$V_x=V_z=0\,.$$

Следовательно

$$U=w=0\,,\ u=0\,. \qquad (4)$$

На верхней границе ($z=h$) выполняются равенства:

$$U=W\,,\ u=\Omega\,. \qquad (5)$$

Запишем краевые условия для температуры и давления:

$$T_0=0\,,\ T_1=0\ \text{for}\ z=0\,. \qquad (6)$$

$$T_0=A\,,\ T_1=B\,,\ P_0=S\,,\ P_1=0\ \text{for}\ z=h\,. \qquad (7)$$

Точное решение уравнение (3) с граничными условиями (4) – (7) имеют вид:

$$T_1 = \frac{zB}{h},\ T_0 = \frac{zA}{6h},$$
$$P_1 = \frac{g\beta B}{2h}\left(z^2 - h^2\right),\ P_0 = \frac{g\beta A}{2h}\left(z^2 - h^2\right) + S + \frac{\nu\Omega(h-z)}{h}, \tag{8}$$
$$U = \frac{g\beta Bz}{24h\nu}\left(5h^3 - 6h^2 z + z^3\right) + \frac{Wz}{h},\ u = \frac{\Omega z}{h},\ w = \frac{\Omega z^2}{2h}.$$

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВВАЮЩИЕ КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА ПРИ ЛИНЕЙНОМ НАГРЕВЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ

Проанализируем полученные решения. Отметим, что функции T_0 и T_1 изменяются по линейному закону с различными коэффициентами пропорциональности, а поведение функций (возрастание или убывание) определяется условиями (рис. 1). Такая же ситуация с градиентом давления P_1 (рис. 2).

Скорость V_z и составляющая градиента V_x по горизонтальной координате не зависят от способа нагрева (положительные или отрицательные значения температуры на границе слоя). При $\Omega > 0$ скорость V_z монотонно убывает по квадратичному закону по толщине слоя (функция u линейно возрастает); при противоположном значении ($\Omega < 0$) наблюдается монотонное возрастание скорости V_z (u линейно убывает) (рис. 3)

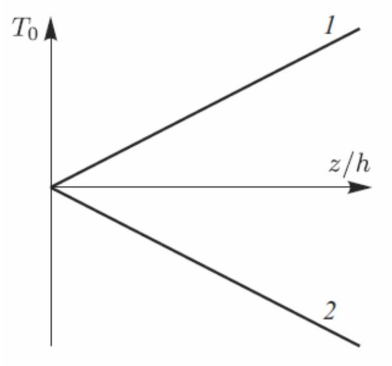

РИСУНОК 1. График T_0 при различных граничных условиях

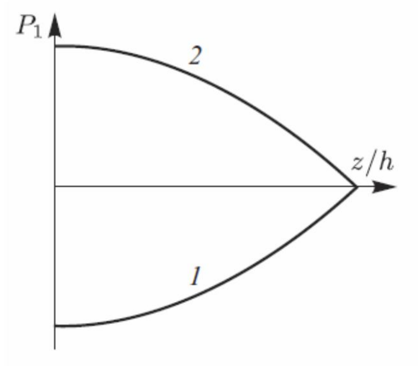

РИСУНОК 2. График P_1 при различных граничных условиях

Проанализируем однородную компоненту скорости U, параллельную оси абсцисс. Пусть $T_0 = \Theta > 0$ и $T_1 = \Theta > 0$ для $z = h$. Тогда

$$U = \frac{z}{h} f\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{z}{h}\left[\frac{g\beta\Theta}{24h^3\nu}\left(5 - 6\frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h}\right)^3\right) + W\right].$$

При $W = 0$ функция U принимает вид:

$$U = \frac{g\beta\Theta}{24h^3\nu}\left[\frac{z}{h}\left(\frac{z}{h} - 1\right)\left(\left(\frac{z}{h}\right)^2 + \frac{z}{h} - 5\right)\right].$$

Данная функция имеет два нуля на области определения, которые являются граничными точками: $z = 0$ и $z = h$. Очевидно, что во внутренних точках слоя жидкости скорость сонаправлена оси абсцисс, принимая максимальное значение $U = 1.07607\frac{g\beta\Theta}{24\nu h^3}$ для $z = 0.446298h$. В том случае, если $W = 0$, то U принимает только положительные значения внутри слоя, а нулевое значение имеет только на твердой границе (условие прилипания). При задании скорости, направление которой противоположно оси абсцисс ($W < 0$), могут существовать ≪застойные≫ точки (скорость принимает нулевые значения). Анализ величины U показывает, что возможна только одна точка, в которой скорость может обратиться в нуль во внутренних точках области определения U. Реализация этого случая определяется неравенством

$$5\frac{g\beta\Theta}{24\nu h^3} + W > 0.$$

В этом случае скорость U имеет «застойную» точку и принимает как положительные, так и отрицательные значения, достигая при этом максимального значения внутри слоя.

При выполнении противоположного неравенства скорость U будет отрицательна, монотонно убывая на всей области определения (минимум достигается на верхней границе) (рис. 4).

Завершаем исследование решений, описывающих конвективное течение Куэтта при линейном распределении температуры на верхней границе, анализом приведенного давления P_0. При выполнении неравенства

$$2S < g\beta\Theta h + \nu\Omega$$

давление, отнесенное к плотности, может принимать нулевое значение внутри слоя жидкости. Следовательно, могут существовать при подходящем выборе граничных условий области положительного и отрицательного давления. Отметим, что давление на недеформируемой (нижней) границе может быть меньше, чем на верхней границе. Это возможно при выполнении неравенства

$$2\nu\Omega < g\beta\Theta h .$$

Если строго выполняется противоположное неравенство, то давление на нижней границе (как и в случае гидростатического равновесия) будет больше, чем на свободной поверхности. При выполнении равенства давление принимает одинаковые значения на границе, а внутри слоя оно одного знака (положительное).

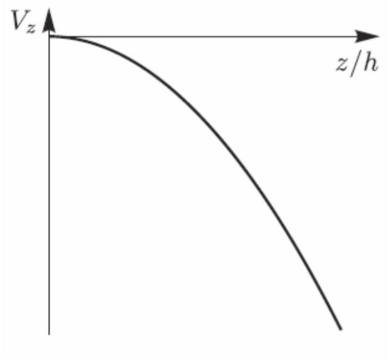

РИСУНОК 3. График функции скорости V_z при различных граничных условиях

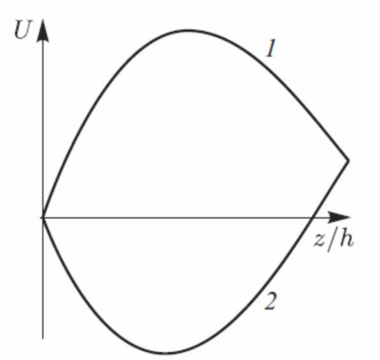

РИСУНОК 4. График функции U при различных граничных условиях

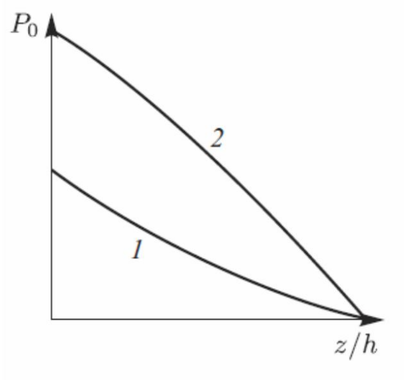

РИСУНОК 5. График функции P_0 при различных граничных условиях

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье получено обобщение установившегося классического решения Куэтта для неизотермических вязких несжимаемых жидкостей. Изученлинейный случай распределения температуры на свободной границе. Показано существование ≪застойных≫ точек у гидродинамических полей при определенных ограничениях на физические постоянные и граничные условия. Посредством методов локализации корней у полиномиальных решений изучены качественные и количественные свойства полученных точных решений в классе линейно растущих скоростей по горизонтальным координатам.