

ВИХРЕВОЕ ИЗОБАРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ НАВЬЕ

Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю.

Институт машиноведения УрО РАН

ул. Комсомольская, 34, г Екатеринбург, 620049, Россия.

alex55gor@mail.ru, evgen_pros@mail.ru

В работе рассматривается вихревое изобарическое сдвиговое течение вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости. Вычислено точное решение переопределенной системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. Показано, что в жидкости существуют противотечения при использовании граничного условия Навье для учета проскальзывания.

Постановка задачи

Стационарное крупномасштабное изобарическое сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости описывается безразмерной системой уравнений Навье-Стокса и уравнением несжимаемости [1]:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta V_x \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta V_y \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь V_x , V_y – безразмерные компоненты вектора скорости жидкости; безразмерные горизонтальные координаты x , y определены характерным масштабом длины L , а поперечная координата z – толщиной слоя жидкости h ; $\delta = h/L$ – отношение масштабов длины; $\text{Re} = \frac{LV}{\nu}$ – число Рейнольдса где V – характерный масштаб скорости, ν –

коэффициент кинематической вязкости жидкости, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости рассматривается в бесконечном слое. На нижней твердой поверхности $z=0$ учитывается граничное условие Навье [2, 3]:

$$-\alpha \frac{\partial V_x}{\partial n} = V_x, \quad -\alpha \frac{\partial V_y}{\partial n} = V_y. \quad (2)$$

Здесь α – коэффициент вязкого трения.

На верхней свободной поверхности $z=1$ заданы неоднородное поле скоростей:

$$V_x = W \cos \psi + W_2 y, \quad V_y = W \sin \psi, \quad (3)$$

Точное решение

Стационарное точное решение системы Навье-Стокса (1) будем вычислять в виде [4,5]:

$$V_x = U_0(z) + yU_2(z), \quad V_y = V_0(z) \quad (4)$$

Представление гидродинамических полей (4) позволяет разрешить переопределенную систему уравнений Навье-Стокса (1). Это оказывается возможным благодаря специальному выбору неоднородного поля скоростей, которое тождественно удовлетворяет уравнению несжимаемости (1).

После подстановки формул (4) в (1) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$U_2'' = 0, V_0'' = 0, U_0'' = \delta^2 \operatorname{Re} U_2 V_0. \quad (5)$$

Уравнения системы выписаны в порядке их интегрирования. Общее решение системы является полиномиальным:

$$U_2(z) = C_1 z + C_2, V_0(z) = C_3 z + C_4$$

$$U_0 = \operatorname{Re} \delta^2 \left[C_6 + C_3 z + \frac{C_2 C_4}{2} z^2 + \frac{C_2 C_3 + C_1 C_4}{6} z^3 + z^4 \frac{2C_1 C_3}{24} \right]$$

Граничные условия (2), (3) с учетом класса решения (4) примут вид: на нижней поверхности $z=0$:

$$U_2 = -\alpha U_2', U_0 = -\alpha U_0', V_0 = -\alpha V_0';$$

на верхней, свободной поверхности $z=1$:

$$U_2 = W_2, U_0 = W \cos \psi, V_0 = W \sin \psi.$$

Решение системы с заданными граничными условиями имеет вид:

$$U_2(z) = W_2 \frac{z-\alpha}{1-\alpha},$$

$$V_0(z) = W \sin \psi \frac{z-\alpha}{1-\alpha},$$

$$U_0(z) = W \frac{\alpha-z}{\alpha-1} \cos \psi +$$

$$+ \operatorname{Re} \delta^2 W_2 W \sin \psi \left[\frac{z^2(z^2 - 4z\alpha + 6\alpha^2)}{12(\alpha-1)^2} + \frac{(z-\alpha)(1-4\alpha+6\alpha^2)}{12(\alpha-1)^3} \right]. \quad (6)$$

Исследование поля скоростей

Из вида правой части следует, что наличие корней полиномов (6) не зависит от значения скорости W , а зависит от угла ψ . Из решения (6) системы уравнений (5) следует равенство:

$$U_0'' = \delta^2 \operatorname{Re} W W_2 \sin \psi \left(\frac{z-\alpha}{1-\alpha} \right)^2.$$

Следовательно, вторая производная U_0 знакопостоянна, обращается в ноль в точке $z=\alpha$.

Знак производной определяется знаком произведения $W_2 \sin \psi$. Решение $U_0(z)$ имеет знакопостоянную кривизну, а уравнение $U_0(z)=0$ имеет не более двух корней. Для удобства исследования обе части уравнения

$$\frac{\alpha-z}{\alpha-1} \cos \psi + \operatorname{Re} \delta^2 W_2 \sin \psi \left[\frac{z^2(z^2 - 4z\alpha + 6\alpha^2)}{12(\alpha-1)^2} + \frac{(z-\alpha)(1-4\alpha+6\alpha^2)}{12(\alpha-1)^3} \right] = 0$$

разделим на $\cos \psi$ при $\psi \neq \pi/2$ и получим уравнение $U^*(z)=0$:

$$U^* = \frac{\alpha-z}{\alpha-1} + \operatorname{Re} \delta^2 W_2 \operatorname{tg} \psi \left[\frac{z^2(z^2 - 4z\alpha + 6\alpha^2)}{12(\alpha-1)^2} + \frac{(z-\alpha)(1-4\alpha+6\alpha^2)}{12(\alpha-1)^3} \right]. \quad (7)$$

Граничные условия для функции U^* записываются следующим образом:

$$U^*(0) = -\alpha U^{*'}(0), U^*(1) = 1.$$

Очевидно, вторая производная $U^{*''}(z)$ примет вид $U_0'' = \delta^2 \operatorname{Re} W_2 \operatorname{tg} \psi \left(\frac{z-\alpha}{1-\alpha} \right)^2$ и будет

знакопостоянной. Рассмотрим случаи:

1) Произведение $W_2 \operatorname{tg} \psi < 0$, следовательно, функция $U^*(z)$ выпукла вверх. Исследования показывают, что при изменении $0 < \alpha < 1$ на отрезке $[0,1]$ всегда существует один корень

уравнения (7) рис. 1 и рис 4. Следовательно, одна застойная точка существует всегда. На рисунке 2 представлена зависимость изменения графика функции U^* от параметра α , $0 < \alpha < 0.5$.

2) Произведение $W_2 \operatorname{tg} \psi > 0$, следовательно, функция $U^*(z)$ выпукла вниз. Если функция $U^*(z)$ положительна, то она не имеет нулей. Функция $U^*(z)$ может иметь один корень (рис. 3) или 2 корня (рис 4). При больших значениях комплекса $\operatorname{Re} \delta^2 W_2 \operatorname{tg} \psi$ и $\alpha < 0.464$ два корня существуют всегда рис. 5, рис. 6. В этом случае у скоростей существует две застойные точки. При малых $\operatorname{Re} \delta^2 W_2 \operatorname{tg} \psi$ у уравнения $U_0(z) = 0$ существует один корень и, соответственно, одна застойная точка.

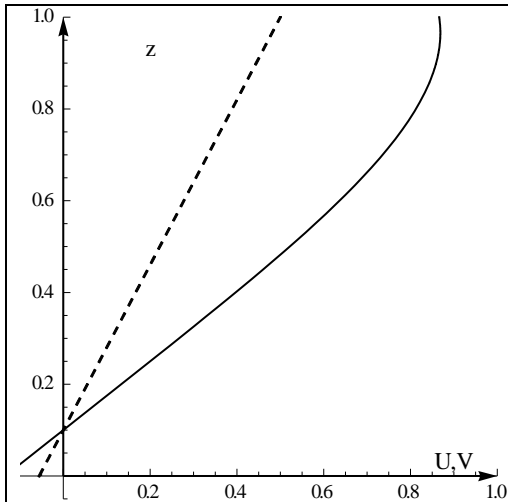


Рис 1.
 $\psi \rightarrow \pi/3, W_2 = -1, \alpha = 0.1,$
 $\operatorname{Re} = 1000, \delta = 0.1$

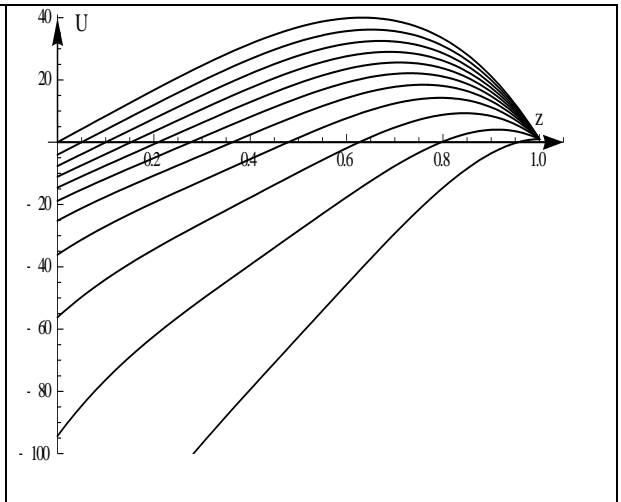


Рис. 2.
 $\psi = \pi/4, W_2 = -10, \operatorname{Re} = 10000, \delta = 0.1,$
 $\operatorname{Re} = 100000., \delta = 0.1$

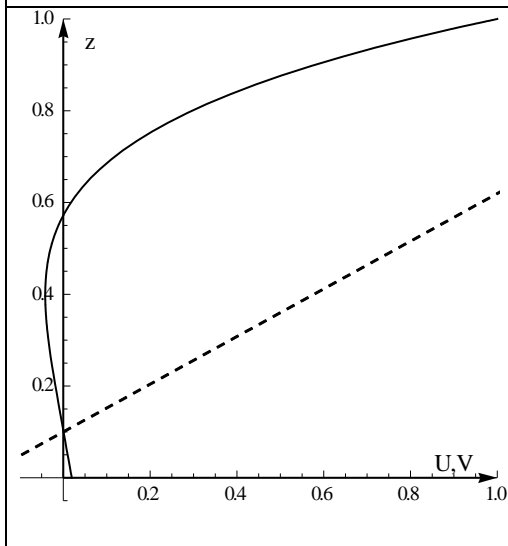


Рис. 3.
 $\psi = \pi/3, W_2 = 1., \alpha = 0.1, \operatorname{Re} = 1000, \delta = 0.1$

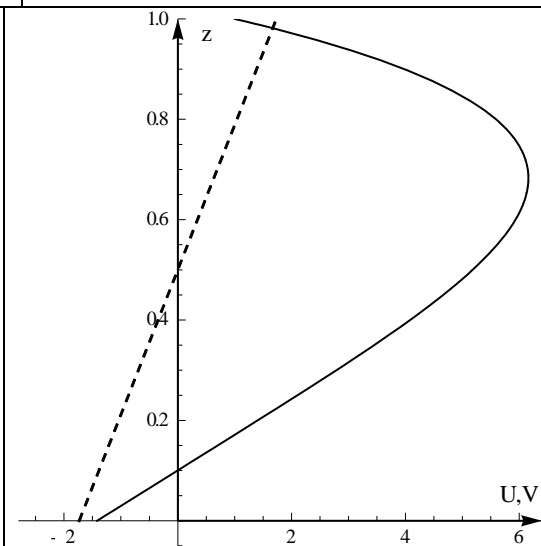
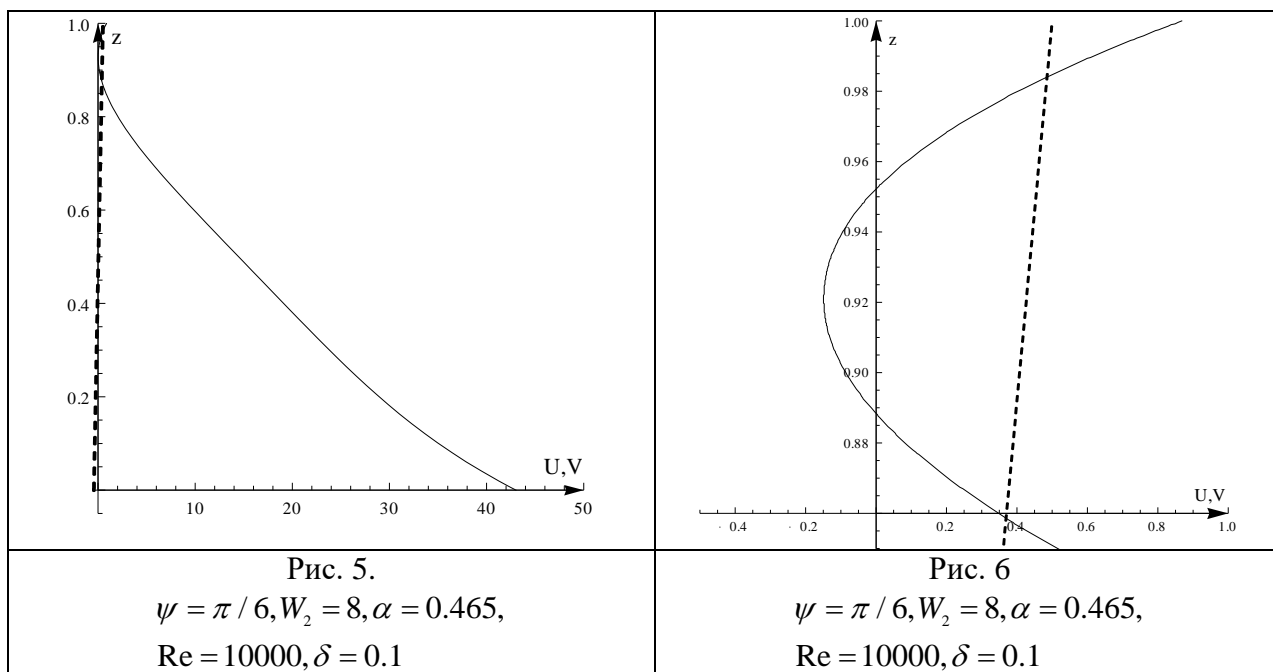


Рис. 4
 $\psi = \pi/3, W_2 = -10., \alpha = 0.1, \operatorname{Re} = 1000, \delta = 0.1$



Заключение.

В работе получены аналитические решения задачи изобарического вихревого течения вязкой несжимаемой жидкости. Показана возможность расслоения потока жидкости и возникновение противотока. Исследовано влияние проскальзывания Навье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т 6. Гидродинамика. М.: Наука, 2006. 736 с.
2. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Reports on Progress in Physics. 2005. V. 39. P. 2859–2897.
3. Е.И. Борзенко, О.А. Дьякова, Г.Р. Шрагер Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестник ТГУ, Механика, 2014 №2(28) С. 35-44.
4. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. - 2014. - Т.10, №2. - С. 177-182.
5. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: ПГУ, 2006. 155 с.
6. Аристов С. Н., Шварц К.Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207 с.
7. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 2. С. 25-31.